1 Grundlegende Begriffe

Definition: Ein System ist ein mathematisches Modell mit Eingängen und Ausgängen, das die Beziehungen zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen beschreibt.

Weitere Einschränkungen:

- Systeme sind zeitinvariant $\boxed{T[k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2] = k_1 \cdot T[x_1] + k_1 \cdot T[x_1]}$
- Systeme sind linear, $\boxed{T[x_1[t-t_0]] = y(t-t_0)}$ bei Nichtlinearitäten ist es oftmals zweckmäßiger in der Umgebung des Arbeitspunktes zu linearisieren
  $\Rightarrow$ LZI-Systeme (LTI)
- kausale Systeme werden angestrebt. (Ursache vor Wirkung)

2 Beschreibung von Signalen und Systemen im Zeitbereich

2.1 Sprungfunktion, Sprungantwort

Sprungfunktion $s(t)$*:*

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}}$$

Der Wert an der Unstetigkeitsstelle kann auch anders definiert werden, z.B. durch $s(0) = \frac{1}{2}$, wenn der Signalverlauf in eine gerade und eine ungerade Komponente zerlegt werden soll.

Sprungantwort $a(t)$*:*

Gibt man auf ein System als Eingangssignal die Sprungfunktion $x(t) = s(t)$ so erhält man als Ausgangssignal die Sprungfunktion $y(t) = a(t)$

2.2 Delta-/Dirac- Impuls, Impulsantwort

Delta-/Dirac- Impuls $\delta(t)$*:*

$$\boxed{\delta(t) = \frac{ds(t)}{dt}}$$

Impulsantwort $h(t)$*:*

Gibt man auf ein System als Eingangssignal die Sprungfunktion $x(t) = \delta(t)$ so erhält man als Ausgangssignal die Sprungfunktion $y(t) = h(t)$

Eigenschaften von $\delta(t)$*:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \delta(t)dt = A} \qquad \boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt}$$

Ausblendeigenschaft von $\delta(t)$*:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t)dt = x(0)} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u) \cdot \delta(t)dt = x(-u)} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(u-t)dt = x(u)}$$

Zusammenhang zwischen Sprungantwort $a(t)$ *und Impulsantwort* $h(t)$

$$\boxed{a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{da(t)}{dt}}$$

2.3 Die Faltung

Faltungsintegral:

$$\boxed{y(t) = \underbrace{x(t) * h(t)}_{x(t) \text{ mit } h(t) \text{ gefaltet}} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot h(\tau) \cdot x(t-\tau)d\tau} \qquad \boxed{f(t) * \delta(t) = f(t)}$$

Für kausale Systeme gilt:

$$h(t) = 0 \text{ für } t < 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot x(t-\tau)d\tau}$$

Für kausale und einseitige Eingangssignale (, die ebenfalls für negative Zeiten verschwinden)

$$h(t) = x(t) = 0 \text{ für } t < 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot x(t-\tau)d\tau}$$

Weiterer Sonderfall:

Das System sei kausal und Eingangsfunktion ist die Sprungfunktion $x(t) = s(t)$

$$\boxed{y(t) = \int_{0}^{t} s(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)d\tau \quad y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot s(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)d\tau}$$

Anschauliche Deutung der Faltung:

Spiegelung(Faltung), Verschiebung, Multiplikation, Integration, Ergebnis

3 Beschreibung von Signalen und Systemen im Frequenzbereich

3.1 Frequenzgang

$$x(t) = A\left(\underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{reelle Testfunktion}} + \underbrace{j \cdot \sin(\omega t)}_{\text{mathematische Ergänzung}}\right) = A \cdot e^{j\omega t}$$

Mit den Faltungssatz folgt:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot A \cdot e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \underbrace{A \cdot e^{j\omega t}}_{x(t)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \Rightarrow$$

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}d\tau} \quad H(j\omega) \text{...Frequenzgang}$$

($H(j\omega)$ ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort $h(\tau)$)

Definition von $H(j\omega)$*:*

$$\boxed{H(j\omega) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{j\omega t}}}$$

Anwendung der vorausgegangenen Gleichung auf die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$a_n \overset{(n)}{y} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 = b_m \overset{(m)}{x} + b_{m-1} \overset{(m-1)}{x} + \ldots + b_2\ddot{x} + b_1\dot{x} + b_0$$

mit $x(t) = A \cdot e^{j\omega t}$ und $y(t) = x(t) \cdot H(j\omega) = A \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$ folgt

$$\boxed{H(j\omega) \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}}$$

3.2 Ortskurven des Frequenzganges

Durch Verhältnisbildung $H(j\omega) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{j\omega t}}$ geht die Zeitabhängigkeit verloren und man erhält mit der Zeigerlänge $|H(j\omega)|$ das Amplitutenverhältnis zwischen $y(t)$ und $x(t)$ und mit der Phasenlage $\varphi(\omega)$ die Phasenverschiebung zwischen $y(t)$ und $x(t)$.

Durch Variation von ω erhält man die Ortskurve von $H(j\omega)$

<u>Die komplexe Wechselstromrechnung ist ein Spezialfall des Frequenzganges.</u>
Wegen der Linearität ist es gleichgültig, ob zuerst der Frequenzgang ermittelt wird oder ob die Einzelkomponenten in den Frequenzbereich „Transformiert" werden und anschließend die Gesamtschaltung analysiert wird.

3.3 Bode Diagramm

Andere Art der Darstellung vom Frequenzgang

3.4 Fouriertransformation

$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt}$$

$F(j\omega)$ heißt die Fouriertransformierte von $f(t)$

Kurzschreibweise: $\boxed{F(j\omega) \bullet\!-\!\circ f(t)}$

Hinreichende Bedingung für die Existenz von der Fouriertransformierten ist die absolute Integrierbarkeit von $f(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$

Umkehrintegral: $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$

3.5 Faltungssatz

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \circ\!-\!\bullet F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)}$$

3.6 Fouriertransformierte reeller Zeitfunktionen

Jede reelle Zeitfunktion $f(t)$ läßt sich in eine gerade und ungerade Komponente zerlegen

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= f_g(t) + f_u(t) \\ f_g(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \\ f_u(t) &= \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{aligned}}$$

$$\boxed{R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t)\cdot\cos(\omega t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)dt}$$

$$\boxed{jX(\omega) = -j\int_{-\infty}^{+\infty} f_u(t)\cdot\sin(\omega t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = -j\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F(j\omega) &= F^*(-j\omega) \\ |F(\omega)| &= |F(-\omega)| \\ \varphi(\omega) &= -\varphi(-\omega) \end{aligned}}$$

3.7 Korrespondenzen zur Fourier-Transformation

Nr.	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$2\pi\cdot\delta(\omega)$
3	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\cdot \mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
4	$\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi\frac{t}{T}} = \mathrm{si}\left(\pi\frac{t}{T}\right)$	$T\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
5	$s(t)$	$\pi\cdot\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
6	$s(t)\cdot e^{-\frac{t}{T}}\quad (T>0)$	$\frac{T}{1+j\omega T}$
7	$e^{-\frac{\lvert t\rvert}{T}}\quad (T>0)$	$\frac{2T}{1+(\omega T)^2}$
8	$e^{-\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2}\quad (T>0)$	$T\cdot e^{-\frac{(\omega T)^2}{4\pi}}$
9	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$
10	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\pi\left[e^{j\varphi}\delta(\omega-\omega_0) + e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_0)\right]$
11	$s(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] - \frac{j\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$
12	$s(t)\cdot\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right] - \frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$

3.8 Die wichtigsten Theoreme zur Fourier-Transformation

Superpositionssatz:

$\boxed{a_1\cdot f_1(t) + a_2\cdot f_2(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad a_1\cdot F_1(j\omega) + a_2\cdot F_2(j\omega)}$ $\boxed{f^*(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F^*(-j\omega)}$

Änlichkeitssatz

$\boxed{f(at) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)}$ $\boxed{f(-t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(-j\omega)}$

bei reellen Zeitfunktionen: $\boxed{f(-t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F^*(j\omega)}$

Verschiebungssatz:

$\boxed{f(t-t_0) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}}$ $\boxed{f(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \quad \circ\!-\!\bullet \quad F^*(j(\omega-\omega_0))}$

Symmetrie der Fouriertransformation:

$\boxed{f(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(j\omega)}$ korrespondiert mit $\boxed{F(jt) \quad \circ\!-\!\bullet \quad 2\pi(f(-\omega))}$

Differentiationssatz:

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (j\omega)^n \cdot F(j\omega)}$$

$$\boxed{(-jt)^n \cdot f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega)}$$

Integratilnstheorem:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot F(0) \cdot \delta(\omega)}$$

Faltungssatz:

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)}$$

Multiplikationssatz:

$$\boxed{2\pi \cdot f_1(t) \cdot f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(j\omega) * F_2(j\omega)}$$

Parsevalsches Theorem:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega}$$

Ist $f(t)$ eine reelle Funktion: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega}$

4 Idealisierte Modellsysteme

4.1 Verzerrungsfreie Systeme, Kenngrößen

Man bezeichnet ein System als verzerrungsfrei, wenn das Eingangssignal, abgesehen von einem Amplitudenfaktor A_0 und einer Zeitverschiebung t_0, formgetreu zum Ausgang übertragen wird.

$$\boxed{y(t) = A_0 \cdot x(t - t_0)}$$

Fouriertransformation auf obige Beziehung:

$$Y(j\omega) = A_0 \cdot X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega) = A_0 \cdot e^{-j\omega t_0}} \qquad \boxed{H(\omega) = |H(j\omega)| = A_0} \qquad \boxed{\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0}$$

4.2 Der ideale Tiefpaß

$$\boxed{H(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) \cdot e^{-j\omega t_0}} \qquad \boxed{h(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \mathrm{si}(\omega_g(t - t_0)) = \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g(t - t_0))}{\omega_g(t - t_0)}}$$

Der Verlauf der Impulsantwort zeigt, daß es sich beim idealen Tiefpaß (Küpfmüller-Tiefpaß) um kein kausales System handelt. Er ist damit nicht realisierbar, er dient als Referenzsystem.

Bewertung der Impulsbreite (Zeitdauer): $T = \frac{\pi}{\omega_g} = \frac{1}{2 \cdot f_g}$

Andererseits ist die Bandbreite: $B = \omega_g = 2\pi \cdot f_g$

Produkt Bandbreite * Impulsbreite: $T \cdot B = \frac{1}{2 \cdot f_g} \cdot 2\pi \cdot f_g = \pi = \text{konst.}$

$$\boxed{\text{Zeitdauer} \cdot \text{Bandbreite} = \text{konst.}}$$

für die Sprungantwort gilt: $\boxed{T_a = \frac{1}{2 \cdot f_g} = \frac{\pi}{\omega_g}}$

4.3 Der ideale Bandpaß

$$\boxed{H(j\omega) = \left\{\mathrm{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)\right\} \cdot e^{-j\omega t_0}} \qquad \boxed{H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2} t} \cos(\omega_0 t)}$$

Es gilt allgemein für symmetrische Bandpässe: $\boxed{h(t) = \underbrace{h_{TP}(t)}_{\text{Tiefpaß}} \cdot 2\cos(\omega_0 t)}$

5 Blockschaltbildalgebra

Reihenschaltung: $\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}$

Parallelschaltung: $\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H_1(j\omega) \pm H_2(j\omega)}$

Kreisstruktur: $\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 \mp H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}}$

$H_2(j\omega)$ liegt im Mit(+)- bzw. Gegen(-)-Kopplungskreis

(für die Gleichung im Nenner anderes Vorzeichen verwenden)

6. Laplace-Transformation

6.1 Definition und Eigenschaften

$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$

$$\boxed{F(p) = \int_{0-}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \quad \text{mit} \quad p = \sigma + j\omega} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) \cdot e^{p \cdot t} dt \quad \text{für} \quad t > 0}$$

p...komplexe Frequenzvariable

6.2 Übertragungsfunktion

Voraussetzungen:

- Das System ist energiefrei für t<0
- $x(t)$ ist eine rechtsseitige Funktion mit keiner Vergangenheit

⇒ Übertragungsfunktion:

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}}$$

Verwandschaft mit den Frequenzgang:

$$\boxed{H(p) \xleftrightarrow{p \leftrightarrow j\omega} H(j\omega)}$$

Voraussetzungen für obige Gleichung:

- Gilt bei kausalen und asymptotischen System
- In $h(t)$ dürfen nur abklingende e - Funktionen und abklingende Schwingungen vorhanden sein.

(Gleichbedeutend: in $H(j\omega)$ sind keine δ -Funktionen.

Dies gilt allgemein für jedes Signal $f(t)$ beschrieben durch $F(p)$ bzw. $F(j\omega)$.

6.3 Rücktransformation

Zerlegung von umfangreichen Funktionen zur leichteren Rücktransformation:

Voraussetzung $F(p)$ besitze Zählerpolynom $Z(p)$ und Nennerpolynom $N(p)$;

$$F(p)=\frac{Z(p)}{N(p)}=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{p^m+\beta_{m-1}p^{m-1}+\ldots+\beta_2p^2+\beta_1p^1+\beta_0}{p^n+\alpha_{n-1}p^{m-1}+\ldots+\alpha_2p^2+\alpha_1p^1+\alpha_0}$$

Beschränkung: $m\le n$

p_v sind Nullstellen des Nennerpolynoms

Vorerst: **Einfach und reell:**

$$F(p)=\frac{Z(p)}{N(p)}=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{p^m+\beta_{m-1}p^{m-1}+\ldots+\beta_2p^2+\beta_1p^1+\beta_0}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_{n-1})(p-p_n)}$$

Partialbruchzerlegung:
$$F(p)=A_\infty+\sum_{v=1}^{n}\frac{A_v}{p-p_v}$$
A_v ...Residuen

Bestimmung von A_v und A_∞ durch den Heaviside'schen Entwicklungssatz:

$$\lim_{p\to\infty}\left\{A_\infty+\sum_{v=1}^{n}\frac{A_v}{p-p_v}\right\}=\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{p^m+\beta_{m-1}p^{m-1}+\ldots+\beta_2p^2+\beta_1p^1+\beta_0}{p^n+\alpha_{n-1}p^{m-1}+\ldots+\alpha_2p^2+\alpha_1p^1+\alpha_0}\right\}$$

$$A_\infty=\lim_{p\to\infty}F(p)=\begin{cases}\frac{b_m}{a_n} & \text{für } m=n\\ 0 & \text{für } m<n\end{cases}$$

$$A_v=\lim_{p\to p_v}(p-p_v)F(p)=\left.\frac{Z(p)}{N'(p)}\right|_{p=p_v}$$

Rücktransformation:
$$f(t)=A_\infty\delta(t)+s(t)\sum_{v=1}^{n}A_ve^{p_vt}$$

Mehrfache Nullstellen des Nennerpolynoms, hier **zweifach reelle Nullstellen**

Partialbruchzerlegung:
$$F(p)=A_\infty+\sum_{\substack{v=1\\ v\ne i,i+1}}^{n}\frac{A_v}{p-p_v}+\underbrace{\frac{A_{i1}}{p-p_i}+\frac{A_{i2}}{(p-p_v)^2}}_{T_{id}}$$

$$A_{i1}=\lim_{p\to p_i}\frac{d}{dp}\left[F(p)\cdot(p-p_i)^2\right]$$

$$A_{i1}=\lim_{p\to p_i}\left[F(p)\cdot(p-p_i)^2\right]$$

Rücktransformation:
$$f_{id}(t)=s(t)\cdot\left[A_{i1}e^{p_it}+A_{i2}te^{p_it}\right]$$

Einfache konjunktiert komplexe Nullstellen des Nennerpolynoms

$$p_i=\sigma_i+j\omega_i \qquad p_{i+1}=\sigma_i-j\omega_i=p_i^*$$

A_i und A_{i+1} lassen sich mit $A_v=\lim_{p\to p_v}(p-p_v)F(p)=\left.\frac{Z(p)}{N'(p)}\right|_{p=p_v}$ bestimmen.

$$F_{i2}(p)=\frac{A_i}{p-p_i}+\frac{A_{i+1}}{p-p_{i+1}}=\frac{A_i}{p-p_i}+\frac{A_i^*}{p-p_i^*}=\frac{|A_i|e^{j\varphi_i}}{p-\sigma_i-j\omega_i}+\frac{|A_i|e^{-j\varphi_i}}{p-\sigma_i+j\omega_i}$$

Rücktransformation

$$f_{i2}(t)=s(t)|A_i|e^{\sigma_it}\cdot2\cdot\cos(\omega_it+\varphi_i)$$

6.4 Pole-Nullstellendiagram, Stabilität

$$\boxed{H(p)=\frac{Z(p)}{N(p)}=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{(p-p_{01})(p-p_{02})\dots(p-p_{0m})}{(p-p_{\infty1})(p-p_{\infty2})\dots(p-p_{\infty n})}}$$

$p_{0\mu}$ sind die Nullstellen von $Z(p)$, sind **Nullstellen** von $H(p)$

$p_{\infty\mu}$ sind die Nullstellen von $N(p)$, sind **Pole** von $H(p)$

Pole und Nullstellen beschreiben bis auf den Faktor $\frac{b_m}{a_n}$ das System vollständig, d.h. die Dynamik des Systems wird vollständig beschrieben.
0...Nullstellen (im Pole-Nullstellen-Diagramm)
X...Pole (im Pole-Nullstellen-Diagramm)

Realsisierbarkeitsbedingung

Es sind nur Systeme realisierbar, bei denen gilt $\boxed{m \le n}$

Asmptotische Stabilität

Die Eingangsgröße eines System sei $x(t)=0$ für $t>t_0$. Ein lineares zeitinvariantes System ist dann asymptotisch stabil, wenn gilt $\lim_{t\leftarrow\infty} y(t)=0$.

Asymptotische Stabilität ist als gegeben, wen für alle Pole gilt: $\boxed{\mathrm{Re}\{p_{\infty\nu}\}<0 \quad 1\le\nu\le n}$

6.6 Behandlung geladener Energiespeicher

a) Kondensator

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt} \qquad u_c(t)=\frac{1}{C}\int i_c(t)dt$$

$\boxed{I_c(p)=p\cdot C\cdot U_c(p)-C\cdot u_c(0-)}$ Parallelschaltung von Modellkondensator und Stromquelle

$\boxed{U_c(p)=\frac{1}{p\cdot C}I_c(p)+\frac{u_c(0-)}{p}}$ Reihenschaltung von Modellkondensator und Spannungsquelle

b) Spule

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_L(t)=\frac{1}{L}\int u_L(t)dt$$

$\boxed{U_L(p)=p\cdot L\cdot I_L(p)-L\cdot i_L(0-)}$ Reihenschaltung von Modellspule und Spannungsquelle

$\boxed{I_L(p)=\frac{1}{p\cdot L}U_L(p)+\frac{i_L(0-)}{p}}$ Parallelschaltung von Modellspule und Stromquelle

6.7 Allpaß, Phasenminimumsystem

Definition eines Allpasses: $\boxed{|H(\omega)|=\text{konst.} \qquad \forall\omega}$

Bei einen Allpaß liegen die Pole und Nullstellen symmetrisch zur imaginären Achse. Aus Stabilitätsgründen liegen die Pole links, die Nullstellen rechts.

Achtung: hier ist $s=p$

Die Laplace-Transformation und einige Anwendungen in der Systemtheorie

Definition der Laplace-Transformation (= L-Transformation), Laplace-Integral

$$\boxed{\begin{aligned}F(s)&=\int_{0-}^{\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt\\ f(t)&=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\cdot e^{-s\cdot t}\,ds\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}F(s)&=L\{f(t)\}\\ f(t)&=L^{-1}\{F(s)\}\end{aligned}}$$

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ (Korrespondenz)

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation wird nur auf lineare, zeitinvariante und kausale Systeme angewendet. Zur Anwendung benötigt man eine (genügend lange) Liste von Korrespondenzen $f(t)\cdot\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ sowie die sogenannten „Transformationsregeln". Ausgangspunkt für beides ist das Laplace-Integral.

Transformationsregeln

Linearität (Satz über Linearkombinationen)

$$\boxed{\begin{aligned}&L\{C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t)+\dots+C_n\cdot f_n(t)\}=\\&=C_1\cdot L\{f_1(t)\}+C_2\cdot L\{f_2(t)\}+\dots+C_n\cdot L\{f_n(t)\} \qquad (C_1,C_2,\dots,C_n\in C)\end{aligned}}$$

Es darf gliedweise transformiert werden, konstante Faktoren bleiben dabei erhalten.

Ähnlichkeitssatz

$$\boxed{L\{f(a\cdot t)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a\in R; a\ne 0)}$$

Der Parameter s in der Bildfunktion $F(s)=L\{f(t)\}$ wird durch $\frac{s}{a}$ ersetzt und die neue Bildfunktion anschließend mit $\frac{1}{a}$ multipliziert.

Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts, Verzögerung)

$$\boxed{L\{f(t-t_0)\cdot\varepsilon(t-t_0)\}=F(s)\cdot e^{-s\cdot t_0} \qquad (t_0\ge 0)}$$

Die Bildfunktion $F(s)=L\{f(t)\}$ wird mit $e^{-s\cdot t_0}$ multipliziert.

Dämpfungssatz

$$\boxed{L\{e^{-\delta\cdot t}\cdot f(t)\cdot\varepsilon(t)\}=F(s+\delta) \qquad (\delta\in C)}$$

In der Bildfunktion $F(s)=L\{f(t)\}$ wird der Parameter s durch $s+\delta$ ersetzt.

Ableitungssätze (für die Orginalfunktion)

1.Ableitung: $\boxed{L\{\dot f(t)\}=s\cdot F(s)-f(0-)}$

2.Ableitung: $\boxed{L\{\ddot f(t)\}=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0-)-\dot f(0-)}$

n-te Ableitung: $\boxed{L\{f^{(n)}(t)\}=s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0-)-s^{n-2}\cdot\dot f(0-)-\dots-f^{(n-1)}(0-)}$

Die Bildfunktion $F(s)=L\{f(t)\}$ wird zunächst mit s^n multipliziert, dann wird ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in der Variablen s subtrahiert (die Polynomkoeffizienten sind die Anfangswerte der Orginalfunktion $f(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot f(t),\dots f^{(n-1)}(t)$).

Integrationssatz (für die Orginalfunktion)

$$L\left\{\int_{0-}^{t+} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot F(s) \qquad (s \neq 0)$$

Die Bildfunktion $F(s) = L\{f(t)\}$ wird mit $\frac{1}{s}$ multipliziert.

Faltungssatz

Faltungsprodukt:

$$\underbrace{f_1(t) * f_2(t)}_{\text{"Faltungsprodukt"}} = \begin{cases} = \int_{0-}^{t+} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\cdot d\tau = \\ = \int_{0-}^{t+} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\cdot d\tau \end{cases}$$

(Faltungsintegral, Faltung der Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$)

$$L\{f_1(t) * f_2(t)\} = L\left\{\int_{0-}^{t+} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\cdot d\tau\right\} = L\left\{\int_{0-}^{t+} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\cdot d\tau\right\} =$$

$$= L\{f_1(t)\}\cdot L\{f_2(t)\} = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

Grenzwertsätze

Anfangswert $\boxed{f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s\cdot F(s)]}$

Endwert $\boxed{f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s\cdot F(s)]}$

Laplace-Transformation von periodischen Funktionen

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{1-e^{-s\cdot T}}\cdot \int_{0-}^{T} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \frac{F_0(s)}{1-e^{-s\cdot T}}}$$

$F_0(s)$ ist die Bildfunktion von $f(t)$ für $0 \le t < T$ (T...Periodendauer). $F_0(s)$ wird mit $\frac{1}{1-e^{-s\cdot T}}$ multipliziert $\Rightarrow F(s)$

Die Lösung linearer DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten mittels Laplace-Transformation

Eine (gewöhnliche) lineare Differentialgleichung DGL mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenen Anfangswerten (Anfangswertproblem) läßt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation wie folgt lösen:

Lineare DGL mit konst. Koeffizienten $y(t)$	(direkter Lösungsweg) $\dashrightarrow$	Spezielle Lösung der DGL
$\downarrow$ (1) Laplace-Transformation		$\uparrow$ (3) Rücktransformation
Algebraische Gleichung	(2) Lösen der Gleichung $\rightarrow$ Auflösen nach $Y(s)$	Lösung der algebraischen Gleichung

Für die Rücktransformation (3) kann die Partialbruchzerlegung hilfreich sein.

Anwendung auf RCL- Netzwerke, Blidnetzwerke

Um die transformierten Maschen- und Knotenpunktsgleichungen für das Netzwerk zu erhalten, kann man zunächst das Netzwerk transformieren und dann aus diesem „Bildnetzwerk“ Die gewünschten Gleichungen ablesen.

(Beim Bildnetzwerk wird j der komplexen Wechselstromrechnung durch S ersetzt.)

Übertragungsfunktion $G(s)$

Bei einem Siso-System sei der Zusammenhang zwischen Eingangsgröße $x(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ durch eine lineare Integrodifferenentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben.
Hat das System keine Vorgeschichte, d.h. $x(t) = 0$ und $y(t) = 0$ für $t < 0$, d.h. alle Vergangenheitswerte bei 0- sind gleich Null. $\Rightarrow$

$\boxed{Y(s) = G(s)\cdot X(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$ $G(s)$ „Übertragungsfunktion des Systems“

Systemantworten auf standardisierte Eingangssignale

Die Impulsantwort $g(t)$ (=Gewichtsfunktion)

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = 1\cdot G(s)$$

$\Rightarrow$ Impulsantwort $\boxed{g(t) = L^{-1}\{G(s)\}}$

Die Sprungantwort $h(t)$ (=Übergangsfunktion)

$$x(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\cdot G(s)$$

$\Rightarrow$ Sprungantwort $\boxed{h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$

Die Rampenantwort $r(t)$ $\quad x(t) = t\cdot\varepsilon(t)$

Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s}\cdot G(s) = L\{h(t)\} = L\left\{\int_{0-}^{t+} g(\tau)\cdot d\tau\right\}}$$

$$\boxed{G(s) = s\cdot H(s) = L\{g(t)\} = L\{\dot{h}(t)\}}$$

Berechnung von Systemantworten mit Hilfe der Impuls- bzw. der Sprungantwort

$$\boxed{\begin{aligned} &Y(s) = G(s)\cdot X(s) \\ &y(t) = g(t) * x(t) = \int_{0-}^{t+} g(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau = \int_{0-}^{t+} g(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Y(s) = G(s)\cdot X(s) = H(s)\cdot s\cdot X(s)} \\ &y(t) = h(t) * \dot{x}(t) = \int_{0-}^{t+} h(t-\tau)\cdot \dot{x}(\tau)\cdot d\tau = \int_{0-}^{t+} h(\tau)\cdot \dot{x}(t-\tau)\cdot d\tau \end{aligned}}$$

Im Falle einer abschnittsweise definierten Funktion $x(t)$ ist das erste Integral günstiger!

7. Stochastische Signale

7.1 Problemstellung und Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeit:

Ein Zufallsexperiment besitze n mögliche Versuchsergebnisse $A_1, A_2, \ldots A_n$, diese bilden die Ereignismenge A: $\boxed{A = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines einzelnen Ereignisses A_ν sei $P(A_\nu)$, wobei gilt: $\boxed{0 \le P(A_\nu) \le 1}$ und $\boxed{\sum_\nu A_\nu = 1}$ Abkürzung:

$$P(X = x_\nu) = p_\nu$$

Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Schließen sich die beiden Ereignisse A_1 und A_2 gegenseitig aus, so gilt:

$$\boxed{P(A_1 \vee A_2) = P(A_1) + P(A_2)}$$

Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Sind die beiden Ereignisse A_1 und A_2 statistisch voneinander unabhängig, so gilt:

$$\boxed{P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}$$

Ansonsten: $\boxed{P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}$; hierbei ist $P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A_2, nachdem A_1 eingetreten ist.

Verteilungsfunktion:

Aus formalen Gründen müssen die folgenden Überlegungen für diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen teilweise getrennt durchgeführt werden.

Das Auftreten des Ereignisses A_ν ist durch eine Zahl $X(A_\nu)$ zu kennzeichnen. Kurzschreibweise:

$$X(A_\nu) = X$$

Bei einer Diskreten Zufallsvariablen kann man eine Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses angeben: $P(X = a)$.

Bei einer kontinuierlichen Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisbereichs angebbar: $P(a < X < b)$

Es gilt:

$$\boxed{P(-\infty < X < +\infty) = 1 \qquad P(X \le c) + P(X > c) = P(-\infty < X < +\infty) = 1 \qquad P(X > c) = 1 - P(X \le c)}$$

Definition der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X:

Es gilt:
$$\boxed{\begin{array}{lll} F(x) = P(X \le x) & x \in \Re & \\ 0 \le F(x) \le 1 & F(-\infty) = 0 & F(+\infty) = 1 \end{array}}$$

Für $x_2 > x_1$ findet man:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1) = P(X \le x_1) + P(x_1 < X \le x_2) - P(X \le x_1) = P(x_1 < X \le x_2) \ge 0$$

Somit ist $F(x)$ eine monoton wachsende Funktion.

Verteilungsfunktion:

$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$ Da $F(x)$ eine monoton wachsende Funktion ist, muß gelten: $f(x) \ge 0$

Weiterhin: $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1}$

Erwartungswerte:

Erwartungswerte sind Maßzahlen zur „groben" Beurteilung von Verteilungen. Sie lassen sich aus der Verteilungsdichtefunktion durch Mittelwertbildung gewinnen.

1. Linearer Mittelwert: $\boxed{m_x = E(X) = \sum_\nu x_\nu \cdot p_\nu \qquad m_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx}$

2. Quadratischer Mittelwert: $\boxed{q_x^2 = E(X^2) = \sum_\nu x_\nu^2 \cdot p_\nu \qquad q_x^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx}$

3. Varianz:
   Die obigen Mittelwerte sind zur Kennzeichnung von Zufallsgrößen allein schlecht geeignet. Zum Beispiel besitzen die beiden Folgen 1; 2; 3; 4; 5 und 2,8; 2,9; 3; 3,1; 3,2 denselben linearen Mittelwert m_x=3.
   Um darzustellen, daß die Verteilung in beiden Fällen völlig anders ausschaut, ermittelt man die „mittlere quadratische Abweichung" vom linearen Mittelwert:

$$\boxed{\sigma_x^2 = E\left[(X - m_x)^2\right] = \sum_\nu (x_\nu - m_x)^2 \cdot p_\nu \qquad \sigma_x^2 = E\left[(X - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx}$$

Man bezeichnet σ_x^2 als Varianz und $\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2}$ als Standardabweichung oder Streuung.

Man findet: $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - 2m_x \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx + m_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$\boxed{\sigma_x^2 = q_x^2 - m_x^2}$ Die Erwartungswerte heißen auch Momente einer Verteilung.

Verbundverteilung:

Ein stochastisches Ereignis besteht im allgemeinen aus mehreren Zufallsgrößen. Von besonderer Bedeutung sind Prozesse mit zwei Zufallsvariablen (z.B.: Eingangs- und Ausgangsgröße eines Systems). Die beiden Zufallsgrößen $X(A)$ und $Y(A)$ eines Ereignisses A lassen sich verknüpfen:

$\boxed{(X(A) \le x) \wedge (Y(A) \le y)}$ oder kürzer: $(X \le x) \wedge (Y \le y)$

Verbundverteilungsfunktion:

$$F(x, y) = P(X \le y \wedge Y \le y)$$

Verbundverteilungsdichtefunktion:

$$\boxed{f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \cdot dv \cdot du}$$

Die zugehörigen eindimensionalen Randverteilungen sind:

$$\boxed{F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \cdot dv \cdot du = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \cdot dv \cdot du = \int_{-\infty}^{y} f(v) \cdot dv}$$

Sind die Zufallsgrößen X und Y stochastisch unabhängig, dann gilt entsprechend dem Multiplikationssatz

$$\boxed{P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y) \qquad F(x, y) = F(x) \cdot F(y) \qquad f(x, y) = f(x) \cdot f(y)}$$

Erwartungswerte bei Verbundverteilungen:

a) Summationsmittelwert:

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(y)dy$$

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)=m_x+m_y}$$

b) Produktmittelwert: $\boxed{E(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot y\cdot f(x,y)dxdy}$

c) Kovarianz:

$$c_{xy}=E\big((X-m_x)\cdot(Y-m_y)\big)\qquad c_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)\cdot(y-m_y)\cdot f(x,y)dxdy$$

$$c_{xy}=\sum_\mu\sum_\nu(x_\mu-m_x)\cdot(y_\nu-m_y)\cdot p_{\mu\nu}$$

$$c_{xy}=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)\qquad c_{xy}=E(X\cdot Y)-m_x-m_y$$

Wenn stochastische Unabhängigkeit: $\boxed{c_{xy}=E(X\cdot Y)-m_x-m_y=0}$

d) Varianz:

Die Varianz der Summe von 2 Zufallsvariablen ist:

$$\sigma_{x+y}^2=E\left(\left(X-m_x+Y-m_y\right)^2\right)\qquad \sigma_{x+y}^2=E\left(\left(X-m_x\right)^2\right)+E\left(\left(Y-m_y\right)^2\right)+2E\left(\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right)$$

$$\sigma_{x+y}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2c_{xy}$$

e) Orthogonalität

Zwei Zufallsvariable heißen orthogonal, wenn gilt $\boxed{E(X\cdot Y)=0}$

7.2 Beschreibung stochastischer Prozesse

Stationäre Prozesse:

Ein regelloser Prozeß ist dann stationär, wenn sich seine statistischen Kenngrößen (Verteilungsfunktion, Erwartungswerte, usw.) mit der Zeit **nicht** ändern, d.h., es ist gleichgültig, zu welchen Zeitpunkt der Erwartungswerte gewonnen werden.

Ergodische Prozesse:

Linearer und quadratischer Erwartungswert eines ergodischen Prozesses:

$$\boxed{m_x=E(X(t_1))=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,t_1)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x_i(t)dt=\overline{x_i(t)}}$$

$$\boxed{q_x^2=E(X^2(t_1))=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,t_1)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x_i^2(t)dt=\overline{x_i^2(t)}}$$

Der Index i für den Musterprozeß entfällt in Zukunft.

7.3 Korrelationsfunktionen

7.3.1 Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$$

$$r_{xx}(t_1,t_2)=c_{xx}(t_1,t_2)+m_x(t_1)\cdot m_x(t_2)$$

Anmerkungen:

- Sind die beiden Prozesse $X(t_1)$ und $X(t_2)$ statistisch unabhängig, dann ist $c_{xx}(t_1,t_2)=0$ und $r_{xx}(t_1,t_2)=m_x(t_1)\cdot m_x(t_2)\cdot X(t_1)$ und $X(t_2)$ heißen dann unkorreliert.
- Sind $X(t_1)$ und $X(t_2)$ statistisch voneinander abhängig wird $c_{xx}(t_1,t_2)\neq 0$ und $r_{xx}(t_1,t_2)\neq m_x(t_1)\cdot m_x(t_2)\cdot$
- $t_1=t_2$,dann gilt $r_{xx}(t_1,t_1)=E[X^2(t_1)]=q_x^2$ ist gleich den quadratischen Mittelwert, hier ist maximale innere Verwandtschaft zwischen $X(t_1)$ und $X(t_2=t_1)$ gegeben. Später $r_{xx}(t_1,t_1)$ ist Maximalwert.

Stationäre Prozesse:

Die absoluten Zeitpunkte t_1 und t_2 beeinflussen das Ergebnis nicht, es ist nur noch von der Differenz $\tau=t_2-t_1$ abhängig $\boxed{r_{xx}(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]=E[X(t_1)\cdot X(t_1+\tau)]=r_{xx}(\tau)}$

$$\boxed{r_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x(t)x(t+\tau)dt}$$

Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion (AKF)

a) $\boxed{r_{xx}(\tau=0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x^2(t)dt=\overline{x^2(t)}=q_x^2=\text{Effektivwert}^2}$

b) $\boxed{r_{xx}(\tau)=r_{xx}(-\tau)}$ AKF ist gerade Funktion

c) $\boxed{\underbrace{r_{xx}(0)}_{\text{Maximalwert}}\geq r_{xx}(\tau)}$

d) Für $\tau\to\infty$ nimm die statistische Verwandtschaft zwischen $X(t_1)$ und $X(t_1+\tau)$ normalerweise ab:

$$\boxed{r_{xx}(\tau\to\infty)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x(t)dt\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x(t+\tau)dt=\overline{x(t)}^2=m_x^2}$$

Hinweis: gilt nicht, wenn in $x(t)$ deterministische periodische Anteile vorhanden sind.

7.3.2 Kreuzkorrelationsfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} r_{xy}(t_1,t_2) &= E\left[X(t_1)\cdot Y(t_2)\right] \\ r_{xx}(t_1,t_2) &= c_{xy}(t_1,t_2) + m_x(t_1)\cdot m_y(t_2) \end{aligned}}$$

Stationäre Prozesse: $\boxed{r_{xy}(t_1,t_2) = r_{xy}(\tau)}$

Ergodische Prozesse $\boxed{r_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)y(t+\tau)dt}$

Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

a) $\boxed{r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)}$ schiefe Symmetrie

b) $\boxed{r_{xy}(\tau=0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\cdot y(t)dt = \overline{x(t)\cdot y(t)} = \text{Wirkleistung}}$

$r_{xy}(0)$ ist nicht zwangsläufig das Maximum von $r_{xy}(\tau)$

c) Sind $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert (statistisch unabhängig) $\boxed{r_{xy}(\tau) = \overline{x(t)}\cdot\overline{y(t)} = m_x\cdot m_y \quad \forall\tau}$

d) $\boxed{\left|r_{xy}(\tau)\right| \le \frac{1}{2}\left[\overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)}\right] = \frac{1}{2}\left(q_x^2 + q_y^2\right)}$

7.4 Spektraldarstellung stochastischer Prozesse

<u>Wirlner-Khintchine-Transformation (Fouriertransformation der AKF)</u>

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} \qquad \boxed{r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega} \qquad \boxed{S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_T(j\omega)\right|^2}$$

$S_{xx}(\omega)$ ist spektrale Leistungsdichtefunktion

$S_{xx}(\omega)\Delta\omega$ ist Leistung im Frequenzintervall $\omega + \Delta\omega$

$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)d\omega$ ist Gesamtleistung des Signals

<u>Eigenschaften von</u> $S_{xx}(\omega)$:

- $\boxed{S_{xx}(\omega) \ge 0}$
- wegen $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$ ist: $\boxed{S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \ \Rightarrow \text{reelle Funktion}}$

<u>Definition für das Kreuzleistungsdichtespektrum</u>

$$\boxed{S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} \qquad \boxed{r_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega}$$

wegen $r_{yx}(\tau) = r_{xy}(-\tau)$ ist: $\boxed{S_{yx}(j\omega) = S_{xy}^*(j\omega) = S_{xy}(-j\omega)}$

7.5 Stochastische Prozesse und lineare Systeme (LZI)

$$\boxed{m_y = m_x\cdot H(0) \qquad \overline{Y(t)} = \overline{X(t)}\cdot H(0)}$$

$$\boxed{r_{xy}(\tau) = h(\tau) * r_{xx}(\tau)} \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \boxed{S_{xy}(j\omega) = H(j\omega)\cdot S_{xx}(\omega)}$$

$$\boxed{r_{yy}(\tau) = h(\tau) * r_{yx}(\tau)} \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \boxed{S_{yy}(\omega) = H(j\omega)\cdot S_{yx}(j\omega)}$$

Mit $S_{yx}(j\omega) = S_{xy}^*(j\omega)$ $\boxed{S_{yy}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2\cdot S_{xx}(\omega)}$